**PROJET DE FIN D'ETUDES**

pour obtenir le diplôme de

**Université Galatasaray**
Spécialité : **Mathématiques**
Directeur : **Meral TOSUN**

# CLASSIFICATION DES ALGEBRES DE LIE DE DIMENSION $\leq 4$

préparée par **Hilal ERGÜN**

*Juin '11*

**THÈSE**

pour obtenir le diplôme de l' **Université De Galatasaray**

Spécialité : **Mathématiques**

Directeur : **Meral TOSUN**

# CLASSIFICATION DES ALGÈBRES DE LIE DE DIMENSION $\leq 4$

préparée par **Hilal ERGÜN**

*Juin '11*

## INTRODUCTION

Une algèbre de Lie est un espace vectoriel muni d'un crochet de Lie, nommée en l'honneur du mathématicien norvégien Sophus Lie. Son premier article a été publié en 1869, sur les nombres imaginaires. Les notions de groupe et d'algèbre de Lie apparaissent depuis 1873. Algèbre et groupe de Lie donnent la naissance à la topologie en mathématiques mais aussi peuvent être vu dans applications en physique moderne : mécanique quantique et théorie de la relativité. Les travaux de Lie seront poursuivis par beaucoup des mathématiciens célèbres comme E.Cartan, W. Killing, C. Chevalley...etc.

Dans ce travail, on s'intéresse aux algèbres de Lie de petit dimension. La classification des algèbres de Lie est préséntée essentiellement par rapport à la dimension. Nous n'avons pas une classification complete pour les algèbres de Lie de dimension $\geq 6$. Par contre, les algèbres de Lie nilpotentes ont été classifiée jusqu'à la dimension 8.

Dans le chapitre 1, on se préparé pour définir l'algèbre de Lie. On commence le chapitre 2 par la définition de l'algèbre de Lie et on essaie de comprendre la structure de l'algèbre. Finalement dans le chapitre 3, on classifie les algèbres de Lie de dimension 1,2,3 et 4.

On remarque qu'il y a une liaison entre groupes de Lie G et algèbres de Lie. Tout groupe de Lie est associée à une algèbre de Lie. Pour introduire cette algèbre de Lie, il existe deux façons. L'une consiste à introduire un espace de champs de vecteurs sur un groupe de Lie $G$, la seconde consiste à munir l'espace tangent en l'élément neutre d'un crochet de Lie, dérivant de l'expression locale de la loi interne de G. Groupes de Lie sont également usuellement classés en quatre types, représentés comme les algèbres de Lie; groupes de Lie réels basés sur le groupe $\mathbb{R}$, groupes de Lie complexes basés sur le groupe $\mathbb{C}$, groupes de Lie quaternioniques basés sur le groupe des quaternions H et groupes de Lie exceptionnels.

Ici, nous considérons seulement les algèbres de Lie complèxes.

**REMERCIEMENTS**

Je voudrais remercier tout d'abord Meral Tosun. Elle a gentiment accepté d'être ma directrice tout au long de cette période difficile. Elle m'a supporté avec ses connaissances profondes en mathématiques avec patience et pédagogie. Elle a relu et critiqué mon travail plusieurs fois d'un oeil perfectionniste. Travailler avec elle étais instructif et inspirant. Merci á elle de me croire. Je me suis senti que je suis en train de faire les choses utiles pour les mathématiques. Ce fut une expérience magnifique.

Je remercie également les enseignants de mon département ainsi que A.Muhammed Uludağ pour d'être une source d'inspiration avec ses faits et accomplissements, de même que Ayşegül Yıldız Ulus et Gülay Kaya pour d'être tolérantes et bienfaisantes, pour les choses qu'ils ont fait pour moi jusqu'á aujourd'hui et que Susumu Tanabe pour lire mon travail et le critique positivement.

De plus, collectivement, je tiens á remercier tous mes professeurs qui ont contribué á l'étudiante que je suis actuellement á la fin de 4 années avec les leçons qu'ils enseignent et avec ses recommandations. Ils m'ont inspiré beaucoup.

Enfin, un grand merci á ma famille qui me toujours croit et á mes amis qui me soutiennent.

# Table des Matières

**Introduction** **3**

**Remerciements** **4**

**1 Préliminaires** **6**

**2 Algèbre de Lie** **9**
2.1 Définition D'une Algèbre de Lie . . . . . . . . . . . . . . 9
2.2 Sous-Algèbres et Ideaux . . . . . . . . . . . . . . . . . . 13
2.2.1 Homomorphisme . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 15
2.2.2 Dérivation . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 17
2.2.3 Constantes de Structure . . . . . . . . . . . . . . 19

**3 Classification des Algèbres de Lie en Dimension $\leq 4$** **22**
3.1 Algèbres de Lie de dimensions 1 sur $\mathbb{C}$ . . . . . . . . . 23
3.2 Algèbres de Lie de dimensions 2 sur $\mathbb{C}$ . . . . . . . . . 23
3.3 Algèbres de Lie de dimensions 3 sur $\mathbb{C}$ . . . . . . . . . 24
3.3.1 Algèbre de Lie de $\dim L' = 1$ . . . . . . . . . . . 24
3.3.2 Algèbre de Lie de $\dim L' = 2$ . . . . . . . . . . . 25
3.3.3 Algèbre de Lie de $\dim L' = 3$ . . . . . . . . . . . 25
3.4 Algèbres de Lie de dimensions 4 sur $\mathbb{C}$ . . . . . . . . . 25

**Références** **26**

# Chapitre 1

# Préliminaires

Un espace vectoriel est un groupe abélien $V$ sur un corps $F$, sur laquelle l'addition et la multiplication satisfient les axiomes suivants pour tout $v, w \in V, a, b \in F$:

1. $a(v + w) = av + aw$
2. $(a + b)v = av + bv$
3. $(ab)v = a(bv)$
4. $1_F v = v$

Soit $F$ un corps qui présente $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

**Exemple 1** L'exemple le plus simple d'espace vectoriel est l'espace nul $\{0\}$, qui ne contient que le vecteur nul.

**Exemple 2** Un espace vectoriel $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ fourni par des paires des nombres réels $x$ et $y$ dans $\mathbb{R}$(L'ordre des composantes x et y est importante, un tel couple est également appelé une paire ordonnée) Une telle paire est écrit comme $(x, y)$. La somme des deux paires et la multiplication d'une paire avec un certain nombre est défini comme suit:

$$(x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2)$$
$$et$$
$$a(x, y) = (ax, ay)$$

**Exemple 3** Pour tout $n > 0$ où $n \in \mathbb{N}$, l'ensemble des n-uplets d'éléments de $F$ forme un espace vectoriel de dimension n sur $F$ appelé l'espace des n-uplets, noté $F^n$. Un élément de $F^n$ s'écrit:
$x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ où chaque $x_i$ est un élément de $F$. Les opérations

sur $F^n$ sont définies par:

$$x + y = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \ldots, x_n + y_n)$$
$$\alpha x = (\alpha x_1, \alpha x_2, \ldots, \alpha x_n)$$

L'élément neutre pour l'addition est

$$0 = (0, 0, \ldots, 0)$$

et l'opposé d'un élément $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ est le vecteur

$$-x = (-x_1, -x_2, \ldots, -x_n)$$

En général, $F$ est ou bien le corps des nombres réels donnant l'espace euclidien $\mathbb{R}^n$, ou bien le corps des nombres complexes donnant $\mathbb{C}^n$

**Exemple 4** Soit $F^{m\times n}$ l'ensemble des matrices à coefficients dans $F$. Alors $F^{m\times n}$ est un espace vectoriel sur $F$.

**Définition 1.0.1** *Soient $V_1$, $V_2$ et $V_3$ des espaces vectoriels. L'application*

$$\varphi\colon\ (V_1 \times V_2) \longrightarrow V_3$$

*est bilinéaire, si pour tout $v_1 \in V_1$, $v_2 \in V_2$, nous avons*

$$\varphi(v_1, \cdot)\colon\ V_2 \longrightarrow V_3 \text{ est linéar}$$

$$\varphi(\cdot, v_2)\colon\ V_1 \longrightarrow V_3 \text{ est linéar}$$

*Autrement dit, l'application $\varphi : V_1 \times V_2 \longrightarrow V_3$ est bilinéaire si*

*pour tout $x, x' \in V_1, y, y' \in V_2, \alpha \in F$, on a:*

$$\varphi(x + x', y) = \varphi(x, y) + \varphi(x', y)$$

$$\varphi(x, y + y') = \varphi(x, y) + \varphi(x, y')$$

$$\varphi(\alpha x, y) = \alpha\varphi(x, y)$$

$$\varphi(x, \alpha y) = \alpha\varphi(x, y)$$

**Définition 1.0.2** *Soient $F$ un corps et $A$ un espace vectoriel sur $F$. $A$ est une algèbre sur $F$ (ou bien $A$ est appèle $F$-algèbre) s'il satisfie les conditions suivantes:*
*(a) l'application*

$$\varphi\colon\ \begin{cases} A\times A \longrightarrow A \\ (x, y) \longmapsto xy \end{cases}$$

*est bilinéaire. Pour tout $z \in F$, $x, y \in A$, on a*

$$z(xy) = (zx)y = x(zy)$$

*Dans ce cas, A est appèle l'algèbre associative.*
*(b) Il y a un élément* $1_A \in A$ *tel que*

$$\varphi(1_A x) = \varphi(x 1_A) = x \Leftrightarrow 1_A x = x 1_A = x \text{ pour tout } x \in A \text{ et } x \neq 0$$

*S'il satisfie les deux conditions, A est appèle l'algèbre associative unitaire.*

**Exemple 5** Les polynômes à coefficients dans F forment une algèbre associative unitaire de dimension infinie sur F.

**Exemple 6** Les nombres complexes $\mathbb{C}$ forment une algèbre associative unitaire de dimension 2 sur le corps $\mathbb{R}$ des nombres réels.

**Exemple 7** L'ensemble des n×n matrices avec des entrées de F, forment une algèbre associative unitaire sur F par rapport à la multiplication de matrices.

**Exemple 8** L'espace vectoriel des transformations linéaires de V est une algèbre associative unitaire où le produit est donné par la composition des applications bilinéaires.

# Chapitre 2

# Algèbre de Lie

Dans cette chapitre, on donne la définition de l'algèbre de Lie et essaie de comprendre la structure de l'algèbre de Lie.

## 2.1 Définition D'une Algèbre de Lie

**Définition 2.1.1** *Soit $F$ un corps. Une* ***algèbre de Lie*** *sur $F$ est un espace vectoriel $L$ muni d'une application linéaire*

$$[\cdot,\cdot]:\begin{cases} L\times L \longrightarrow L \\ (x,y)\longmapsto [x,y] \end{cases}$$

*satisfaisant les propriétés suivantes:*
*($L1$) $[\cdot,\cdot]$ est une application bilinéaire.*
*($L2$) $\forall x\in L, [x,x]=0$ (anti-symétrie)*
*($L3$) $\forall x,y,z\in L, [x,[y,z]]+[y,[z,x]]+[z,[x,y]]=0$ (identité de Jacobi)*

**Notation 1** *Le produit $[x,y]$ est appelé crochet de Lie de $x$ et $y$.*

**Remarque 2.1.2** *La propriété $[x,x]=0$ est équivalent à $[x,y]=-[y,x]$. En effet: Pour tout $x,y\in L$, on a*

$$[x+y,x+y]=0$$

*Par la bilinéarité,*

$$[x,x]+[x,y]+[y,x]+[y,y]=0$$

*On sait que $[x,x]=0$ et $[y,y]=0$. Donc*

$$[x,y]+[y,x]=0$$

*D'où,*

$$[x,y] = -[y,x]$$

**Exemple 9** Soit $F = \mathbb{R}$. Pour $x = (x_1, x_2, x_3)$ et $y = (y_1, y_2, y_3)$, le produit vectoriel $(x,y) \longmapsto x \wedge y$ qui est défini comme

$$x \wedge y = (x_2y_3 - x_3y_2, x_3y_1 - x_1y_3, x_1y_2 - x_2y_1)$$

est une algèbre de Lie sur $\mathbb{R}^3$, noté par $\mathbb{R}^3_\wedge$.

La multiplication de $x$ et $y$ est définie comme

$$x + y = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, x_3 + y_3)$$

$(L1)$ Pour tout $a \in F$, $\wedge$ est bilinéaire:

$$\begin{aligned}
(x+y) \wedge az =& (x_2 + y_2)az_3 - (x_3 + y_3)az_2, (x_3 + y_3)az_1 - (x_1 + y_1)az_3,\\
& (x_1 + y_1)az_2 - (x_2 + y_2)az_1\\
=& ax_2z_3 + ay_2z_3 - ax_3z_2 - ay_3z_2, ax_3z_1 + ay_3z_1 - ax_1z_3 - ay_1z_3,\\
& ax_1z_2 + ay_1z_2 - ax_2z_1 - ay_2z_1\\
=& ax_2z_3 - ax_3z_2 + ay_2z_3 - ay_3z_2, ax_3z_1 - ax_1z_3 + ay_3z_1 - ay_1z_3,\\
& ax_1z_2 - ax_2z_1 + ay_1z_2 - ay_2z_1\\
=& (ax_2z_3 - ax_3z_2, ax_3z_1 - ax_1z_3, ax_1z_2 - ax_2z_1) + (ay_2z_3 - ay_3z_2,\\
& ay_3z_1 - ay_1z_3, ay_1z_2 - ay_2z_1)\\
=& a(x \wedge z) + a(y \wedge z)
\end{aligned}$$

D'où $\wedge$ est bilinéaire.

$(L3)$ Vérifions l'identité de Jacobi

$$x \wedge (y \wedge z) = (xz)y - (xy)z \text{ pour tout } x, y, z \in \mathbb{R}^3$$

Par la définition de l'identité de Jacobi, nous pouvons écrire:

$$\underbrace{(x \wedge (y \wedge z))}_{(xz)y-(xy)z} + \underbrace{(y \wedge (z \wedge x))}_{(yx)z-(yz)x} + \underbrace{(z \wedge (x \wedge y))}_{(zy)x-(zx)y} = 0 \text{ pour tout } x, y, z \in L$$

$\Rightarrow (xz)y - (xy)z + (yx)z - (yz)x + (zy)x - (zx)y = 0$
Car par la definition du produit scalaire;
$(xz)y = (x_1z_1 + x_2z_2 + x_3z_3)y$
$(zx)y = (z_1x_1 + z_2x_2 + z_3x_3)y$
$\Rightarrow (xz)y = (zx)y$

**Exemple 10** Soit L une algèbre de Lie sur laquelle le crochet de Lie est défini comme $[x, y] = 0$ pour tout $x, y \in L$. On dit que L est **abélienne**;

$$[x, y] = 0 = -[y, x] = [y, x] \Rightarrow [x, y] = [y, x]$$

**Exemple 11** $gl_n(F)$ est l'espace vectoriel de toute les matrices carrées d'ordre n sur F avec le crochet de Lie définié comme:

$$[x, y] := xy - yx, \text{ pour tout } x, y \in gl_n(F)$$

Donc $gl_n(F)$ est une algèbre de Lie.
$(L1)$ L'application bilinéaire

$$\begin{cases} gl_n(F) \times gl_n(F) \longrightarrow gl_n(F) \\ (x, y) \longmapsto [x, y] = xy - yx \end{cases}$$

Pour tout $x, y, z \in gl_n(F), a \in F$,

$$[ax + y, z] = (ax + y)z - z(ax + y)$$

$$\Rightarrow axz + yz - azx - zy = a(xz - zx) + yz + zy = a[x, z] + [y, z]$$

$(L2)$ $[x, x] = xx - xx = 0$ pour tout $x \in gl_n(F)$
$(L3)$ $[x, [y, z]] + [y, [z, x]] + [z, [x, y]] = 0$, pour tout $x, y, z \in gl_n(F)$
$\Rightarrow [x, yz - zy] + [y, zx - xz] + [z, xy - yx] = 0$
D'où $gl_n(F)$ est algèbre de Lie.

**Exemple 12** $sl_n(F) = \{A \in gl_n(F) \mid trace(A) = 0\}$ est une algèbre de Lie. On va regarder si $sl_n(F)$ satisfait les propriétés

$$\text{d'être une algèbre de Lie} \begin{cases} \text{admet une application bilinéaire} \\ \text{anti-symétrie} \\ \text{l'identité de Jacobi} \end{cases}$$

Toutes les éléments de $sl_n(F)$ se trouvent dans $gl_n(F)$.$sl_n(F)$ est sous-espace vectoriel de $gl_n(F)$. Montrons que $sl_n(F)$ est un espace vectoriel:

$$\begin{aligned} [X + Y, Z] &= (X + Y)Z - Z(X + Y) \\ &= XZ + YZ - ZX - ZY \\ &= XZ - ZX + YZ - ZY \\ &= [X, Z] + [Y, Z] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}[aX, Y] &= aXY - aYX \\ &= a(XY - YX) \\ &= z[X, Y]\end{aligned}$$

$(L1)$ Montrons que $sl_n(F)$ est une application bilinéaire.

$$\begin{cases}[aX + bY, Z] = a[X, Z] + b[Y, Z] \\ [X, aY + bZ] = a[X, Y] + b[X, Z]\end{cases}$$

pour l'équation

$$\begin{cases}sl_n(F) \times sl_n(F) \longrightarrow sl_n(F) \\ (X, Z) \longmapsto [X, Z] = XZ - XZ\end{cases} \quad \text{pour tout } X, Y, Z \in sl_n(F)$$

Donc, $sl_n(F)$ admet une application bilinéaire.

$(L2)$ On va chercher si l'équation satisfait la propriété anti-symétrie:

$$\text{Pour tout } X \in sl_n(F), [X, X] = XX - XX = 0$$

$(L3)$ l'identité de Jacobi est:

$$[X, [Y, Z]] + [Y, [Z, X]] + [Z, [X, Y]] = 0, \text{ pour tout } X, Y, Z \in sl_n(F)$$

Par définition du crochet de $sl_n(F)$,

$$[X, YZ - ZY] + [Y, ZX - XZ] + [Z, XY - YX] = 0$$

L'équation est égal à 0 donc, l'identité de Jacobi est vérifiée.

**Exemple 13** L'ensemble des **matrices triangulaire supérieure** dans $gl_n(F)$ est

$$b_n(F) = \{A \in gl_n(F) | x_{ij} = 0, i > j \text{ où } x_{ij} \in A, \forall i, j \in N\}$$

est une algèbre de Lie.

**Exemple 14** L'ensemble des matrices **strictement triangulaire supérieure** dans $gl_n(F)$

$$n_n(F) = \{A \in gl_n(F) | x_{i,j} = 0, i \geqslant j \text{ où } x_{i,j} \in A, \forall i, j \in N\}$$

est une algèbre de Lie.

## 2.2 Sous-Algèbres et Ideaux

**Définition 2.2.1** *Soit L une algèbre de Lie. Un sous-espace K de L est dit une* ***sous-algèbre de Lie*** *s'il est fermé sous le crochet de Lie; autrement dit, si pour tout $x, y \in K$, $[x, y] \in K$.*

**Exemple 15** $sl_n(F)$ est une sous-algèbre de Lie de $gl_n(F)$. Il est clair que $sl_n(F) \subset gl_n(F)$ et dans l'exemple 12 nous avons vu que $sl_n(F)$ est une algèbre de Lie.

**Exemple 16** $b_n(F)$ et $n_n(F)$ sont des sous-algèbres de Lie de $gl_n(F)$.

**Définition 2.2.2** *Soit L une algèbre de Lie. Un sous-espace I de L est dit un* ***idéal*** *de L, si*

$$[x, y] \in I \textit{ for all } x \in L, y \in I$$

**Exemple 17** L'algèbre de Lie L est lui-même un idéal.

**Exemple 18** $\{0\}$ est un idéal de L.

**Remarque 2.2.3** *Comme l'on a $[x, y] = -[y, x]$ dans une algèbre de Lie, nous n'avons pas besoin de préciser si l'idéal est à gauche ou à droite.*

**Exemple 19** Pour montrer que $sl_n(F)$ est un idéal de $gl_n(F)$, il suffit de montrer que $sl_n(F)$ est une sous-algèbre de $gl_n(F)$ et que
$[x, y] \in sl_n(F)$ pour tout $x \in gl_n(F), y \in sl_n(F)$:

Pour simplifier, supposons n=2. Pour x, nous avons $f_{ij}$ et pour y, nous avons $e_{ij}$ comme bases. Soit $f_{11} + f_{22} \neq 0$ et soit $e_{11} + e_{22} = 0$,

$$\begin{aligned}
[x, y] = xy - yx &= \begin{pmatrix} f_{11} & f_{12} \\ f_{21} & f_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e_{11} & e_{12} \\ e_{21} & -e_{11} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} e_{11} & e_{12} \\ e_{21} & -e_{11} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_{11} & f_{12} \\ f_{21} & f_{22} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} f_{11}e_{11} + f_{12}e_{21} & f_{11}e_{12} - f_{12}e_{11} \\ f_{21}e_{11} + f_{22}e_{21} & f_{21}e_{12} - f_{22}e_{11} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} e_{11}f_{11} + e_{12}f_{21} & e_{11}f_{12} + e_{12}f_{22} \\ e_{21}f_{11} - e_{11}f_{21} & e_{21}f_{12} - e_{11}f_{22} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} f_{12}e_{21} - e_{12}f_{21} & \star \\ \star & f_{21}e_{12} - e_{21}f_{12} \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

$\Rightarrow f_{12}e_{21} - e_{12}f_{21} + f_{21}e_{12} - e_{21}f_{12} = 0 \Rightarrow Trace([x, y]) = 0$
Donc, $[x, y] \in sl_n(F) \subset gl_n(F)$, pour tout $x \in gl_n(F), y \in sl_n(F)$ pour $n \geq 2$,
Ainsi, $sl_n(F)$ est une idéal de $gl_n(F)$.

**Exemple 20** $n_n(F)$ est un idéal de $b_n(F)$.

**Remarque 2.2.4** *Un idéal est toujours une sous-algèbre mais une sous-algèbre n'est pas toujours un idéal.*

Par exemple:

**Exemple 21** $b_n(F)$ est une sous-algèbre de $gl_n(F)$ mais n'est pas un idéal pour $n \geq 2$:
Soit $X = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \in b_n(F)$, $Y = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} \in gl_n(F)$

$$\begin{aligned}[X,Y] = XY - YX &= \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 9 & 8 \\ 12 & 9 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 8 \\ 4 & 17 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 0 \\ 8 & -8 \end{pmatrix} \notin b_n(F)\end{aligned}$$

Donc, $b_n(F)$ n'est pas un idéal de $gl_n(F)$ pour $n \geq 2$.

**Définition 2.2.5** ***Le centre d'une algèbre de Lie*** *$L$ est formé de tous les éléments $x$ de $L$ tels que $[x,y] = 0$ pour tout $y$ de $L$:*

$$Z(L) := \{x \in L : [x,y] = 0, \ \textit{pour tout } y \in L\}$$

*$Z(L)$ est clairement un idéal de $L$.*

**Proposition 2.2.6** *$L$ est abélien si $L = Z(L)$.*

**Exemple 22** Quel est $Z(L)$ quand $L = sl_2(F)$.

$$x = \begin{pmatrix} a & b \\ c & -a \end{pmatrix} \in L \text{ et } y = \begin{pmatrix} d & e \\ f & -d \end{pmatrix} \in L$$

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & -a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} d & e \\ f & -d \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} d & e \\ f & -d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & -a \end{pmatrix} = 0$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} ad + bf - ad - ec & ac - bd - bd + ae \\ cd - af - af + cd & ce + ad - fb - ad \end{pmatrix} = 0$$

$\Rightarrow$

$$\begin{cases} \text{bf-ec=0} \\ \text{ae-bd=0} \\ \text{cd-af=0} \end{cases}$$

$\Rightarrow$

$$\begin{cases} \text{bf=ec} \\ \text{ae=bd} \\ \text{cd=af} \end{cases}$$

$\Rightarrow a = \frac{bd}{e}, c = \frac{bf}{e} \Rightarrow \begin{pmatrix} \frac{bd}{e} & b \\ \frac{bf}{e} & -\frac{bd}{e} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d & e \\ f & -d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & -a \end{pmatrix}$

$\Rightarrow Z(L) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ ou bien $Z(L) = \begin{pmatrix} a & b \\ c & -a \end{pmatrix}$.

Cela nous montre que Z(L) peut être seulement égal à 0 ou à $L$.
Par exemple, le centre des algèbres de Lie abéliennes est 0.

### 2.2.1 Homomorphisme

Soient $L_1$ et $L_2$ deux algèbres de Lie sur F. Un **homomorphisme** entre $L_1$ et $L_2$ est une application linéaire

$$\ell\colon \begin{cases} L_1 \longrightarrow L_2 \\ [x,y] \longmapsto \ell([x,y]) = [\ell(x), \ell(y)], \ \forall x, y \in L_1 \end{cases} \tag{2.2.1}$$

**Définition 2.2.7** *L'application ad*

$$adx\colon \begin{cases} L \longrightarrow gl(L) \\ (adx)y := [x,y] \longmapsto ad[x,y] = adx \circ ady - ady \circ adx, \forall x, y \in L \end{cases}$$

*est appelée* ***homomorphisme adjointe****.*

**Remarque 2.2.8** *$adx$ est linéaire pour tout $x \in L$ par la bilinéarité du crochet de Lie. Pour montrer que $adx$ est homomorphisme, il suffit de montrer que*

$$ad([x,y]) = adx \circ ady - ady \circ adx \text{ pour tout } x, y \in L$$

*est équivalent à l'identité de Jacobi. Nous avons,*
$[x,[y,z]] + [y,[z,x]] + [z,[x,y]] = 0 \Rightarrow [z,[x,y]] = -[x,[y,z]] - [y,[z,x]]$
*Utilisons la propriété anti-symétrie de l'algèbre de Lie,*

$$\underbrace{[[x,y],z]}_{(ad[x,y])(z)} = \underbrace{[x,[y,z]]}_{[x,(ady)(z)]} + \underbrace{[y,[z,x]]}_{[y,(adx)(z)]}$$

$\Rightarrow (ad[x,y])(z) = [x,(ady)(z)] - [y,(adx)(z)] = (adx \circ ady)(z) - (ady \circ adx)(z)$

$\Rightarrow ad[x,y] = adx \circ ady - ady \circ adx$
*Ainsi $adx$ est homomorphisme.*

**Remarque 2.2.9** *Une représentation d'une algèbre de Lie est un homomorphisme (2.2.1).*

**Définition 2.2.10** ***La dimension d'une algèbre de Lie*** *est sa dimension en tant qu'espace vectoriel. Lorsque la dimension de l'algèbre de Lie L est finie, on peut définir une base. Supposons en effet que la dimension de L est n, alors on prend* $(e_1, ..., e_n)$ *une base.*[3]

**Exemple 23** Soit $(e_1, e_2, e_3, e_4)$ une base de $gl_2(F)$

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, e_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, e_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, e_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Utilisant cette base, construions les représentations adjointes de $gl_2(F)$; $[e_1, e_1] = [e_2, e_2] = [e_3, e_3] = [e_4, e_4] = 0$ par la définition d'une algèbre de Lie.

$$\begin{aligned}[e_1, e_2] &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &= e_2\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}[e_1, e_3] &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \\ &= -e_3\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}[e_1, e_4] &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &= 0\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}[e_2, e_1] &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &= -e_2\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}[e_2, e_3] &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \\ &= e_1 - e_4\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}[e_2, e_4] &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &= e_2\end{aligned}$$

$$[e_3, e_1] = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$
$$= e_3$$

$$[e_3, e_2] = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$
$$= -e_1 + e_4$$

$$[e_3, e_4] = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$
$$= -e_3$$

$$[e_4, e_1] = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$
$$= 0$$

$$[e_4, e_2] = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$
$$= -e_2$$

$$[e_4, e_3] = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$
$$= e_3$$

$$ad(e1) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, ad(e_2) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$
$$ad(e_3) = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, ad(e_4) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

### 2.2.2 Dérivation

Soit L une algèbre de Lie sur F. Si l'application $D : L \longrightarrow L$ est linéar avec
$$D(ab) = aD(b) + D(a)b \quad \text{for all } a, b \in L,$$

Nous disons que D est une **dérivation** sur L.

Pour tout $a, b, c \in L$ et $\alpha \in F$, D est bilinéaire:
Par la définition d'une application bilinéaire, nous voulons obtenir cette égalité:

$$D(a+b,c) = D(a,c) + D(b,c), \text{ for all } a,b,c \in A$$

Par la définition de la dérivation d'une algèbre de Lie, écrivons

$$D(a+b,c) = \underbrace{(a+b)D(c)}_{aD(c)+bD(c)} + \underbrace{D(a+b)c}_{D(a)c+D(b)c}$$

$$= aD(c) + bD(c) + D(a)c + D(b)c$$

$$= aD(c) + D(a)c + bD(c) + D(b)c$$

$$= D(a,c) + D(b,c) \quad \square$$

Pour obtenir cette égalité:

$$D(\alpha ab) = \alpha D(ab)$$

écrivons

$$D(\alpha ab) = \alpha a D(b) + D(\alpha a)b$$

$$= \alpha a D(b) + \alpha D(a)b$$

$$= \alpha(aD(b) + D(a)b)$$

$$= \alpha D(ab) \quad \square$$

Notons DerA est l'ensemble des dérivations de A. DerA est fermé sous l'addition et sous multiplication(scalaire), est un espace vectoriel de $gl(A)$, est une sous-algèbre de Lie de $gl(A)$ et contient l'application zéro

**Exemple 24** Soient D et E deux derivations d'une algèbre A. Montrer que $[D, E]$ est défini comme

$$[D,E] = D \circ E - E \circ D$$

est aussi une dérivation.
Par la définition du crochet de Lie $[D, E]$ on a

$$[D,E](x,y) = D \circ E(x,y) - E \circ D(x,y)$$

Par la definition de la dérivation,

$$[D,E](x,y) = D \circ \underbrace{E(x,y)}_{xE(y)+E(x)y} - E \circ \underbrace{D(x,y)}_{xD(y)+D(x)y}$$

Donc on obtient,

$$[D,E](x,y) = D \circ (xE(y) + E(x)y) - E \circ (xD(y) + D(x)y)$$

On ré-applique la definition,

$$[D,E](x,y) = \underbrace{D \circ (xE(y) + E(x)y)}_{D(x)E(y)+xD\circ E(y)+D\circ E(x)y+E(x)D(y)} - \underbrace{E \circ (xD(y) + D(x)y)}_{E(x)D(y)+xE\circ D(y)+E\circ D(x)y+D(x)E(y)}$$

On a:

$$= D(x)E(y)+xD\circ E(y)+D\circ E(x)y+E(x)D(y)-E(x)D(y)-xE\circ D(y)-E\circ D(x)y-D(x)E(y)$$

$$= xD \circ E(y) + D \circ E(x)y - xE \circ D(y) - E \circ D(x)y$$

Ainsi,

$$[D,E](x,y) = [D,E]xy + x[D,E]y \quad \square$$

**Exemple 25** $ad : L \longrightarrow L$ est une dérivation. Par définition de $ad$,

$$(adx)[y,z] = [x,[y,z]]$$

De l'idéntite de Jacobi, il vient,

$$\begin{aligned}(adx)[y,z] = [x,[y,z]] &= -[y,[z,x]] - [z,[x,y]] \\ &= [[x,y],z] + [y,[x,z]] \\ &= [(adx)(y),z] + [y,(adx)(z)]\end{aligned}$$

pour tout $x, y, z \in L$

### 2.2.3 Constantes de Structure

**Définition 2.2.11** *Si $L$ est une algèbre de Lie sur $F$ avec le base $\{x_1, ..., x_n\}$ où $n \in \mathbb{N}$, alors $[\cdot,\cdot]$ est muni par les produits $[x_i, x_j]$ où $i, j \in \mathbb{N}$. On définit scalaires $a_{ij}^k \in F$ tel que*

$$[x_i, x_j] = \sum_{k=1}^{n} a_{ij}^k x_k.$$

*On appelle les scalaires $a_{ij}^k$ des **constantes de structure** de $L$.*

**Exemple 26** On trouve les constantes de structure de $sl_2(F)$ par rapport à la base donne par

$$e_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, e_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, e_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$[e_1, e_1] = 0$

$$[e_1, e_2] = e_1e_2 - e_2e_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$
$$= e_3$$

$$[e_1, e_3] = e_1e_3 - e_3e_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$
$$= -2e_1$$

$[e_2, e_1] = -[e_1, e_2] = -e_3$
$[e_2, e_2] = 0$

$$[e_2, e_3] = e_2e_3 - e_3e_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$$
$$= 2e_2$$

$[e_3, e_1] = -[e_1, e_3] = 2e_1$
$[e_3, e_2] = -[e_2, e_3] = -2e_2$
$[e_3, e_3] = 0$

*Et les constantes de structures sont*

$$[e_1, e_1] = 0 \Rightarrow a_{11}^1 = a_{11}^2 = a_{11}^3 = 0$$

$$[e_1, e_2] = a_{12}^1 e_1 + a_{12}^2 e_2 + a_{12}^3 e_3 = e_3 \Rightarrow a_{12}^1 = 0, a_{12}^2 = 0, a_{12}^3 = 1$$

$$[e_1, e_3] = a_{13}^1 e_1 + a_{13}^2 e_2 + a_{13}^3 e_3 = -2e_1 \Rightarrow a_{13}^1 = -2, a_{13}^2 = 0, a_{13}^3 = 0$$

$$[e_2, e_1] = a_{21}^1 e_1 + a_{21}^2 e_2 + a_{21}^3 e_3 = -e_3 \Rightarrow a_{21}^1 = 0, a_{21}^2 = 0, a_{21}^3 = -1$$

$$[e_2, e_2] = 0 \Rightarrow a_{22}^1 = a_{22}^2 = a_{22}^3 = 0$$

$$[e_2, e_3] = a_{23}^1 e_1 + a_{23}^2 e_2 + a_{23}^3 e_3 = 2e_2 \Rightarrow a_{23}^1 = 0, a_{23}^2 = 2, a_{23}^3 = 0$$

$$[e_3, e_1] = a_{31}^1 e_1 + a_{31}^2 e_2 + a_{31}^3 e_3 = 2e_1 \Rightarrow a_{31}^1 = 2, a_{31}^2 = 0, a_{31}^3 = 0$$

$$[e_3, e_2] = a_{32}^1 e_1 + a_{32}^2 e_2 + a_{32}^3 e_3 = -2e_2 \Rightarrow a_{32}^1 = 0, a_{32}^2 = -2, a_{32}^3 = 0$$

$$[e_3, e_3] = 0 \Rightarrow a_{33}^1 = a_{33}^2 = a_{33}^3 = 0$$

# Chapitre 3

# Classification des Algèbres de Lie en Dimension $\leq 4$

Notre but est de présenter une classification des algèbres de Lie. Ici, nous considérons les algèbres de Lie de dimension $\leq 4$, appelés les algèbres de Lie de petit dimension.

Soit $I$ et $J$ les deux idéaux d'une algèbre de Lie L. L'intersection de $I$ et $J$, $I \cap J$

$$I \cap J = \{x : x \in I \text{ et } x \in J\}$$

est un idéal de L. De même $I + J$,

$$I + J := \{x + y | x \in I, y \in J\}$$

est un idéal de L.

**Définition 3.0.12** *On définit un* ***produit d'idéaux*** *comme*

$$[I, J] := Span\{[x, y] : x \in I, y \in J\}$$

$[I, J]$ est un idéal de L:
Par définition, $[I, J]$ est un sous-espace de L.
Si, $x \in I$, $y \in J$ et $u \in L$, alors l'idéntite de Jacobi nous donne,

$$[u, [x, y]] + [x, [y, u]] + [y, [u, x]] = 0$$

$$[u, [x, y]] - [x, [u, y]] - [[u, x], y] = 0$$

$$[u, [x, y]] = [x, [u, y]] + [[u, x], y]$$

$[u, y] \in J$ comme $J$ est un idéal, donc $[x, [u, y]] \in [I, J]$. De méme, $[[u, x], y] \in [I, J]$. Par conséquent, $[u, [x, y]] \in [I, J]$.

Un élément $t \in [I, J]$ est une combinaison linéaire des $[x, y]$ avec $x \in I$,$y \in J$.

$$t = \sum c_i[x_i, y_i]$$

où les $c_i$ sont scalaires et $x_i \in I$ et $y_i \in J$. Donc, pour tout $u \in L$, on a

$$[u, t] = [u, \sum c_i[x_i, y_i]] = \sum c_i[u, [x_i, y_i]]$$

où $[u, [x_i, y_i]] \in [I, J]$. D'où, $[u, t] \in [I, J]$ et donc $[I, J]$ est un idéal de L.

**Remarque 3.0.13** *Si l'on prend $I = J = L$, on obtient $[L, L]$ que nous appelons* **algèbre dérivée** *de L. Au même temps, $[L, L]$ est un idéal de L.*

**Notation 2** *Nous écrivons $L'$ pour $[L, L]$.*

**Remarque 3.0.14** *Soient $L_1$ et $L_2$ deux algèbres de Lie. $L_1$ est isomorphe à $L_2$ si et seulement si leur dimension est même.*

## 3.1 Algèbres de Lie de dimensions 1 sur $\mathbb{C}$

Toute algèbre de Lie de dimension 1 est abélienne.

La unique algèbre de Lie de dimension 1:

- $\mathbb{C}$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, il y a seulement une algèbre de Lie abélienne de dimension n. Donc on va classifier les algèbres de Lie non-abéliennes.

## 3.2 Algèbres de Lie de dimensions 2 sur $\mathbb{C}$

**Théorèm 3.2.1** *Soit $F$ un corps. Il y a une unique, à isomorphisme près, algèbre de Lie en dimension 2 non-abélienne sur $F$. La base de cette algèbre est $\{x, y\}$ avec*

$$[x, y] = x$$

Par la remarque (3.0.14), l'algèbre de Lie de dimension 2 formée par $\mathbb{C}$:

- $\mathbb{C}^2$

La unique algèbre de Lie non abélienne de dimension 2:

- $g_2 = \{\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & -a \end{pmatrix} \mid a, b \in \mathbb{C}\}$

**Remarque 3.2.2** *Par le crochet de Lie defini dans le théorème,* $[x, y] = x = 0 \Rightarrow x = 0$ *for all* $y \in L$*. Donc le centre de cette algèbre est* 0.

## 3.3 Algèbres de Lie de dimensions 3 sur $\mathbb{C}$

On classifie les algèbres de Lie de dimension 3 par rapport à la dimension des algèbres dérivées de ces algèbres.

### 3.3.1 Algèbre de Lie de dim$L' = 1$

**(i)** Supposons la dérivée $L'$ de $L$ est contenue dans $Z(L)$. Il y a une unique algèbre de Lie satisfaisant cette condition:

- $H_1 = \begin{pmatrix} 0 & a & b \\ 0 & 0 & c \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

La base de cette algèbre de Lie est formé de $e_1, e_2, e_3$ où

$$[e_2, e_3] = e_1, [e_2, e_1] = [e_3, e_1] = 0 \text{ et } e_1 \text{ lies in } Z(L)$$

L'algèbre de Lie des $3 \times 3$ matrices strictement triangulaire supérieure sur $F$ est de cette forme avec la base

$$(e_{12}, e_{23}, e_{13}) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Une telle algèbre de Lie est appèle **l'algèbre de Heisenberg**.

**(ii)** Supposons $L'$ n'est pas contenue dans $Z(L)$. Il y a une unique forme pour une telle algèbre de Lie. On le construit comme:

$L = L_1 \bigoplus L_2$ où $L_1$ est non-abélienne et de dimension 2, et $L_2$ est de dimension 1.

Dans ce cas,

- $L = \mathbb{C}^3$ où $L_2 = \mathbb{C}$ et $L_1 = \mathbb{C}^2$
- $L = g_2 \bigoplus \mathbb{C}$ avec $L_2 = \mathbb{C}$ et $L_1 = g_2$ ci-dessus.

La forme usuelle de cette algèbre de Lie est;

$$[e_1, e_2] = e_2, [e_1, e_3] = ae_3, [e_2, e_3] = 0, a \in \mathbb{C}$$

### 3.3.2 Algèbre de Lie de dim$L' = 2$

Pour comprendre la structure de $L$, on doit comprendre les structures de $L'$ et comment l'application linéaire $adx : L \to L$ agir sur $L'$.

**Lemme 3.3.1**

> *(a)L'algèbre dérivée $L'$ est abélienne.*
> *(b)L'application linéaire $adx : L' \to L'$ est une isomorphisme.*

Par l'isomorphisme dans la remarque (3.0.14), il y a une seule algèbre de Lie satisfaisant ces conditions;

- $H_2 = \begin{pmatrix} a & 0 & b \\ 0 & a & c \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Notée par $r_3$

$$r_3 = [e_1, e_2] = e_2, [e_1, e_3] = e_2 + e_3, [e_2, e_3] = 0$$

### 3.3.3 Algèbre de Lie de dim$L' = 3$

Supposons que $L$ est une algèbre complèxe de dimension 3 tel que $L = L'$. On déjà connait un exemple qui est $L = sl_2(\mathbb{C})$ et cette exemple est unique. Donc pour la base $(e_1, e_2, e_3)$, on a une seule algèbre non-isomorphe:

- $sl_2(\mathbb{C})$

De cette forme:

$$sl_2(\mathbb{C}) = [e_1, e_2] = e_3, [e_1, e_3] = -2e_1, [e_2, e_3] = 2e_2$$

## 3.4 Algèbres de Lie de dimensions 4 sur $\mathbb{C}$

**Théorèm 3.4.1** [2]*Une algèbre de Lie de dimension 4 est isomorphe à un seul des algèbres de Lie suivantes.*
*(on neglige les $[e_i, e_j] = 0, i, j \in \{1, \ldots, 4\}$) Pour $\beta, \gamma \in \mathbb{C}$,*

- $g_{[[\beta,\gamma]]} : [e_4, e_1] = e_1, [e_4, e_2] = \beta e_2, [e_4, e_3] = \gamma e_3;$

- $g_{[[\beta]]} : [e_2, e_3] = e_1, [e_4, e_1] = e_1, [e_4, e_2] = \beta e_2, [e_4, e_3] = (1 - \beta)e_3;$

- $g_c : [e_4, e_1] = ce_1, [e_4, e_2] = e_2, [e_4, e_3] = e_3 + e_2, c \in \mathbb{C}$;

- $a_1 : [e_2, e_3] = e_1, [e_4, e_1] = 2e_1, [e_4, e_2] = e_2, [e_4, e_3] = e_2 + e_3$;

- $a_2 : [e_4, e_1] = e_1, [e_4, e_2] = e_1 + e_2, [e_4, e_3] = e_2 + e_3$;

- $a_3 : [e_3, e_2] = e_2, [e_4, e_1] = e_1$;

- $a_4 : [e_4, e_1] = e_1, [e_4, e_2] = -e_2, [e_1, e_2] = e_4$;

- $a_5 : [e_1, e_2] = e_3, [e_4, e_1] = e_1, [e_4, e_2] = -e_2$;

- $a_6 : [e_4, e_1] = e_1, [e_4, e_2] = e_3$;

- $a_7 : [e_2, e_3] = e_1$;

- $a_8 : [e_2, e_3] = e_1, [e_4, e_3] = e_2$.

# Références


[1] K. ERDMANN et M. J. WILDON : *Introduction to Lie Algebras.* Chapitre 1, 2 et 3, Springer-Verlag London Limited, 2006.

**Articles**

[2] R. BASILI : *Resolutions of Singularities of Varieties of Lie Algebras of Dimensions 3 and 4.* Journal of Lie Theory, Volume 12, pp 397-407, Helderman Verlag, 2002.

**Thèses ou Mémoires**

[3] M. KRAY : *Algèbres de Lie-Applications Aux Particules Élémentaires.* Rapport de Stage de Magistère, Université Louis Pasteur de Strasbourg, 2008.